1	2	3	4	5	6	7	To

Adı-Soyadı:
Numarası :
İmza :

OMÜ FEN-EDB. FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ
2021-2022 Eğitim-Öğretim Yılı MAT314 Kompleks Fonksiyonel Analize Giriş Dersi FİNAL Sınavı

1) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, $(-1+i)^5$ sayılarını kutupsal gösterimden yararlanarak a+ib biçiminde yazınız.

2) $cosz = cosxcoshy - isinxsinhy$ ve $|cosz|^2 = cos^2x + sinh^2y$ eşitliklerini ispatlayınız.

3) $f(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü altında $x = 1$ doğrusunun görüntüsünü bulunuz.

4) $f(z) = \frac{|z|^2}{\bar{z}}$ fonksiyonunun $z_0 = 0$ limitinin olup olmadığını inceleyiniz.

5) $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu verilsin. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ olsun. Eğer z_0 noktasında f' ve g' türevleri var ve $g'(z_0) \neq 0$ ise $\lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ olduğunu gösteriniz.

6) $f(z) = \frac{z^3+iz}{z^2-(1+9i)z-20+5i}$ fonksiyonunun diferansiyellenebileceği en geniş kümeyi bulunuz. $z_0 = 0$ noktasındaki türevini belirleyiniz.

7) Kutupsal formda verilen $f(z) = r^2cos^2\theta + ir^2sin^2\theta$ fonksiyonunun fürevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Not: 1. Soru 10, diğerleri 15'er puandır...

20.06.2022

Süre 100 Dakikadır...

Prof. Birsen S. DUYAR

Komp. Fonk. Teo. Giriş Final sınavı çözümleri

① $\left[\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right]^{10} = \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}\right]^{10}$

$= \left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{10} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^5 = 4\sqrt{2}\left[\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right]$

$= 4-4i$

② $\cos(iy) = \cosh y, \quad \sin(iy) = i\sinh y$

$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy)$

$= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y$

$= \cos^2 x\,(1+\sinh^2 y) + (1-\cos^2 x)(\sinh^2 y)$

$= \cos^2 x + \sinh^2 y$

⑤ $\lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

$= \lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

⑦ $u(r,\theta) = r^2\cos^2\theta, \quad v(r,\theta) = r^2\sin^2\theta, \quad v_r = 2r\sin^2\theta$

$u_r = 2r\cos^2\theta, \quad u_\theta = -2r^2\cos\theta\sin\theta, \quad v_\theta = 2r^2\sin\theta\cos\theta$

$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \Rightarrow 2r\cos^2\theta = \frac{1}{r}2r^2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \sin\theta\cos\theta \Rightarrow \underline{\cos\theta = \sin\theta}$

$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \Rightarrow 2r\sin^2\theta = -\frac{1}{r}(-2)r^2\cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow \underline{\sin\theta = \cos\theta}$

Kutupsal Cauchy-Riemann denklemler sağlanmalı, yani

$\sin\theta = \cos\theta \Rightarrow A = \{\theta : \theta = \frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

kümesinde sağlanır. $D = A$ dır.

3)

$z=x+iy$ o.ü $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{(-y)}{x^2+y^2}=u+iv$

$(x-iy)$

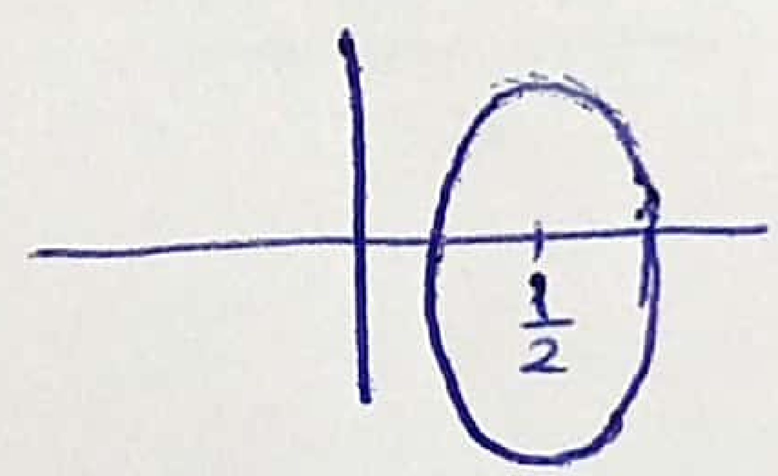
$u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{-y}{x^2+y^2}$ bulunur

$x=1$ için $u=\frac{1}{1+y^2}$, $v=\frac{-y}{1+y^2}$, $y\in(-\infty,\infty)$

$v=-y\cdot\frac{1}{1+y^2}=-y\cdot u \Rightarrow y=-\frac{v}{u}$ ifadesi $u=\frac{1}{1+y^2}$ 'de yerine konulursa;

$u=\frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}} \Rightarrow u=\frac{u^2}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2=u \Rightarrow u^2-u+v^2=0$

$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$, $u\neq 0$



4) $\forall \varepsilon>0$ için $|z-0|<\delta$ o.ş $|f(z)-0|<\varepsilon$ o.ş bir δ buldum

$|z|<\delta$ iken $\left|\frac{|z|^2}{\bar{z}}\right|=\left|\frac{z\cdot\cancel{\bar{z}}}{\cancel{\bar{z}}}\right|=|z|<\delta=\varepsilon$ olup $z_0=0$ noktasında limit vardır

6)

$$D = \mathbb{C} \setminus \{ z : z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i = 0 \}$$

$z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i = 0$ olan kök. bulalım;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+9i)^2 - 4(-20+5i) = 1 + 18i - 81 + 80 - 20i = -2i.$$

$$z_{1,2} = \frac{(1+9i) \mp \sqrt{-2i}}{2} \text{ 'dır.}$$

$w = -2i$ 'nin $\overset{\text{kare}}{\text{kökleri}}$;

$$w_{1,2} = \mp \left[\sqrt{\frac{-0+\sqrt{4}}{2}} - i \sqrt{\frac{0+\sqrt{4}}{2}} \right] = \mp (1-i)$$

O halde

$$z_1 = \frac{(1+9i) + (1-i)}{2} = 1 + 4i \quad \text{ve} \quad z_2 = \frac{(1+9i) - (1-i)}{2} = 5i$$

$$D = \mathbb{C} \setminus \{ z : z = 1 + 4i \wedge z = 5i \}.$$

$$f'(z) = \frac{(3z^2 + i)(z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i) - (2z - (1+9i))(z^3 + iz)}{(z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i)^2}$$

$$f'(0) = \frac{i(-20+5i) + 0}{(-20+5i)^2} = \frac{i(-20+5i)}{(-20+5i)^2} = \frac{i}{\frac{-20+5i}{(-20-5i)}} = \frac{5 - 20i}{400 + 25} = \frac{5}{425} - \frac{20i}{425}$$

$$= \frac{1}{85} - \frac{4i}{85}$$